

**Δομή & Περιεχόμενο Διδακτικού Σεναρίου**

**1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ**

**Θεματική του διδακτικού σεναρίου:** Η έννοια της ισότητας σε διαφορετικά πλαίσια

**Βαθμίδα – Τάξη**:  Α΄ τάξη δημοτικού        **Διδακτικές ώρες:** 2

**Ενότητα του ΠΣ:** Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση - Άλγεβρα/αλγεβρικές σχέσεις

**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):** Οι μαθητές αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας ως έκφραση σχέσης ανάμεσα σε απλές αριθμητικές παραστάσεις και διερευνούν την έννοια της ισότητας σε διαφορετικά πλαίσια.

 Οι μαθητές/τριες αναμένεται:

* Να αναγνωρίζουν πότε τουλάχιστον δύο μαθηματικά αντικείμενα εκφράζουν την ίδια αξία.
* Να μάθουν ότι το αριστερό μέλος μια ισότητας μπορεί να είναι το άθροισμα σε μια πρόσθεση ή η διαφορά σε μια αφαίρεση.
* Να μάθουν ότι το ένα μέλος μιας ισότητας μπορεί να είναι ένας αριθμός και το άλλο ένας αριθμός ή μια πράξη ή το σύνολο/ πλήθος αντικειμένων (που αναπαριστώνται γραφικά ή απτικά)
* Να κατανοήσουν ότι η ισότητα αποτελείται τουλάχιστον από δύο μέλη.
* Να διερευνήσουν τι συμβαίνει εάν προσθέσουμε την ίδια αξία και στα δύο μέλη μιας ισότητας.
* Να είναι σε θέση να δημιουργούν καταστάσεις πρόσθεσης/ αφαίρεσης τις οποίες αναπαριστούν λεκτικά προβλήματα με σωστή συμβολική γραφή.
* Να οδηγούνται σε προβλέψεις και γενικεύσεις για την έννοια της ισότητας και της ισοδυναμίας

**Μεγάλες ιδέες**: Ισοδυναμία, Μετασχηματισμοί

**Διεργασίες και πρακτικές**: Πρακτική μαθηματική επικοινωνία, πρακτική επιλογής και χρήσης εργαλείων, συλλογισμός, αναστοχασμός

**Προαπαιτούμενες δυνατότητες μαθητών/τριών** (γνωστικές και κοινωνικο-πολιτισμικές):

Οι μαθητές/τριες γνωρίζουν:

* να καταμετρούν πραγματικά αντικείμενα και αντικείμενα σε εικόνες και σε άλλες μορφές συμβολικών παραστάσεων
* να αναπαριστούν συμβολικά την πρόσθεση και την αφαίρεση
* τους συνδυασμούς που δίνουν τα αθροίσματα και οι διαφορές των αριθμών
* να γνωρίζουν να επιλύουν απλά προβλήματα

Οι μαθητές/τριες έχουν εμπλακεί σε δραστηριότητες που ευνοούν την ανάπτυξη δεξιοτήτων που  υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων σεβόμενοι την διαφορετικότητα στη σκέψη και έκφραση.

2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ

**2.1. Περί μαθητή και μάθησης (Σύντομα βιβλιογραφικά δεδομένα για τον τρόπο σκέψης των μαθητών, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση της μαθηματικής ιδέας (έννοια, διαδικασία, διεργασία) που αποτελεί αντικείμενο μάθησης στη συγκεκριμένη ενότητα)**

Όπως επιβεβαιώνει και η σχετική βιβλιογραφία (Madej, 2022), το σύμβολο της ισότητας συνιστά μια μαθηματική έννοια γνωστικά απαιτητική για τους μαθητές του δημοτικού. Το βασικό γνωστικό εμπόδιο έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι μαθητές τείνουν να αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας ως ένα σύμβολο που τους καλεί να μπουν σε μια διαδικασία εκτέλεσης υπολογισμών, κατά την οποία τα υπολογιστικά βήματα που υπάρχουν στο αριστερό μέρος της ισότητας οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα που πρέπει να εμφανιστεί στο δεξί μέρος (Ιγγλέζου & Μπρόκου, 2012). Αυτός ο τρόπος αντίληψης περιορίζει την ικανότητα των μαθητών να συνειδητοποιήσουν ότι το σύμβολο της ισότητας χρησιμοποιείται πρωτίστως για να περιγράψει μια σχέση ομοιότητας που υπάρχει ανάμεσα σε δύο διαφορετικές μαθηματικές εκφράσεις που αναπαριστούν το ίδιο αντικείμενο (Madej, 2022).

Υπάρχουν αρκετές έρευνες που καταδεικνύουν με παραδείγματα τη δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν ότι το σύμβολο της ισότητας περιγράφει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο συνόλων (relational symbol) και δεν είναι μονάχα ένα σύμβολο εκτέλεσης υπολογισμών (operator). Χαρακτηριστική είναι η έρευνα του Behr (1980, όπως αναφέρεται σε Ιγγλέζου & Μπρόκου, 2012) όπου οι μαθητές που ήρθαν αντιμέτωποι με την ισότητα 3=3 θεώρησαν ότι το 3 είναι το εξαγόμενο αποτέλεσμα μιας πράξης (π.χ. 7-4), ενώ αντίστοιχα στην ισότητα 4+5=3+6 ανέμεναν ότι κάπως πρέπει να εμφανιστεί στο δεξί μέλος της ισότητας το αποτέλεσμα (9) των πράξεων αυτών.

Τα παραπάνω στοιχεία καθιστούν σαφές ότι οι μαθητές δείχνουν να παραμένουν προσκολλημένοι στην αντίληψη που θέλει το σύμβολο της ισότητας να χρησιμοποιείται ως “εντολή” για την εκτέλεση ενός αριθμητικού υπολογισμού και αυτό συνιστά ένα σημαντικό γνωστικό εμπόδιο που πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη κατά το σχεδιασμό της διδακτικής προσέγγισης. Επομένως, είναι αναγκαία μια εποικοδομητική διδακτική παρέμβαση που θα κάνει τους μαθητές να ξεπεράσουν τα γνωστικά εμπόδια που αναφέρθηκαν και θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν την έννοια της ισότητας και να αποδώσουν στο σύμβολο της ισότητας την κατάλληλη ερμηνεία. Όπως έχει φανεί από σχετικές έρευνες (βλ Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998 - Kieran, 1981, όπως αναφέρονται στο Ιγγλέου & Μπρόκου, 2012), ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να παρέμβει προς την κατεύθυνση αυτή.

**2.2. Έργα**

1η  φάση

**2.2.1.α Οι μαθητές συνδέουν έναν αριθμό με το πλήθος ομοειδών πραγμάτων**

Ο εκπαιδευτικός δίνει σε κάθε ομάδα ένα χαρτί το οποίο έχει χωρίσει στη μέση με μια κάθετη γραμμή. Ζητά από τους μαθητές στη μία πλευρά του φύλλου να γράψουν έναν αριθμό από το 1 ως το 10 και από την άλλη να τοποθετήσουν/ αναπαραστήσουν στο χειραπτικό τους υλικό το πλήθος που ο αριθμός δείχνει. Ο εκπαιδευτικός τους ζητά να παρουσιάσουν τι διάλεξαν και να το αναπαραστήσουν συμβολικά.  Όλες οι ομάδες έχουν στη διάθεσή τους ακόμα ένα φύλλο καταγραφής όπου θα καταγράφουν τη συμβολική αναπαράσταση και αριθμητική παράσταση. Αν στη μια πλευρά έχουν το 5 και η άλλη πλευρά δηλώνει με το πλήθος των αντικειμένων το 5, τότε ποιο είναι το σύμβολο που δείχνει τη σχέση της μίας και της άλλης πλευράς; Αναμένεται να είναι σε θέση να καταγράψουν 5=5. Ο εκπαιδευτικός δημιουργεί πλαίσιο συζήτησης και συζητά για τη σημασία της έννοιας και του συμβόλου της ισότητας.

**2.2.1.β Η ισότητα ως άθροισμα ή διαφορά**

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές στη μία πλευρά να γράψουν έναν αριθμό και στη διπλανή να τον αναλύσουν σε δύο υποσύνολα χρησιμοποιώντας το χειραπτικό τους υλικό και κατόπιν να καταγράψουν συμβολικά τη σχέση. Σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα βρίσκεται στο αριστερό μέλος της ισότητας, γεγονός που οι μαθητές δεν έχουν συνηθίσει να βλέπουν. Στη συνέχεια τους ζητάτε να αναλυθεί ο αριθμός με δύο τρόπους ώστε να προκύψει ισότητα με με τουλάχιστον δύο προσθετέους στο ένα μέλος και τουλάχιστον δύο στο άλλο. Κατόπιν ζητάται να στην αριστερή πλευρά να γραφτεί ένας αριθμός και στη δεξιά μια αφαίρεση που έχει ως διαφορά τον προαναγραφόμενο αριθμό. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές βλέπουν τη διαφορά στην αριστερή πλευρά.

**2.2.1.γ Ισότητες πράξεων**

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν έναν αριθμό και στη μία πλευρά του φύλλου να γράψουν τους προσθετέους σκεπτόμενοι τον αριθμό ως άθροισμα και στην άλλη πλευρά να γράψουν τον μειωτέο και τον αφαιρετέο σκεπτόμενοι τον αριθμό ως διαφορά. Σε κάθε περίπτωση καταγράφεται στο φύλλο καταγραφής η ισότητα. Μπορούν λοιπόν να δημιουργηθούν ισότητες μεταξύ προσθέσεων, μεταξύ αφαιρέσεων και μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης.

**2.2.1.δ Οι μαθητές δημιουργούν ισότητες συσχετίζοντας αριθμούς (εργασία- άγκυρα)**

Δίνονται στους μαθητές 3 αριθμοί (π.χ. 5, 6, 11) τους οποίους πρέπει να συνδυάσουν για να προκύψουν σχέσεις ισότητας (5+6=11, 6+5=11, 11=5+6, 11=6+5, 11-6=5, 11-5=6).

Στη συνέχεια δίνονται στους μαθητές 4 αριθμοί (π.χ. 14, 5, 3, 6) τους οποίους θα συνδυάσουν ώστε να προκύψουν σχέσεις ισότητας (14-6=5+3, 14-6=3+5).

**Επέκταση της δραστηριότητας με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων**

Ως επέκταση της δραστηριότητας  δ ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να προτείνουν 4 αριθμούς που μπορούν να σχετίζονται με σχέσεις ισότητας. Ενδιαφέρον θα είχε να παρατηρηθεί η στρατηγική που κάθε ομάδα θα αναπτύξει στην επιλογή των αριθμών (π.χ. τυχαίοι αριθμοί, γραφουν αρχικά τις πράξεις και κατόπιν δηλώνουν τους αριθμούς), η μαθηματική επικοινωνία και λήψη απόφασης στην ομάδα.

Μια άλλη πρόταση που αξιοποιεί την χρήση ψηφιακών εργαλείων ως επέκταση των δραστηριοτήτων β και γ είναι η παρουσίαση των αποτελεσμάτων κάθε ομάδας να γίνει με τη βοήθεια εργαλείων που παρουσιάζουν την ισότητα μέσα από την εξισορρόπηση ψηφιακών ζυγαριών. Ενδεικτικά προτείνονται:

* Math balance, διαθέσιμο [εδώ](https://www.didax.com/apps/math-balance/)  (βλ. Παράρτημα εικόνα 1)
* Toytheatrer, διαθέσιμο [εδώ](https://toytheater.com/scale)   (βλ. Παράρτημα εικόνα 2)

2η φάση

**2.2.1.ε Οι μαθητές αναζητούν ισότητες μέσα από προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης με 2 ή περισσότερους όρους**

Παιχνίδι *“βρες το ταίρι”*. Ο εκπαιδευτικός μοιράζει σε όλες τις ομάδες μια κρυφή κάρτα με έναν αριθμό, την οποία κρατούν “κλειστή” ώστε καμία ομάδα να μην γνωρίζει τον αριθμό της άλλης. Ωστόσο 2 από τις ομάδες έχουν τον ίδιο αριθμό. Δίνονται οδηγίες στους μαθητές ώστε να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης που θα έχουν ως άθροισμα ή ως διαφορά αυτόν τον αριθμό. Σε κάθε ομάδα δίνονται οδηγίες ώστε να αναπτύξει ένα συγκεκριμένο τύπο προβλήματος (π.χ. *Προβλήματα πρόσθεσης με βάση τη δομή τους:* α) ένωσης, β) τύπου “βάζω”, γ) σύγκρισης, *Προβλήματα αφαίρεσης:* α) συμπληρωματικής αφαίρεσης. β) διανυσματικής αφαίρεσης) (ΑΠ, 2021). Σκοπός της δραστηριότητας είναι οι ομάδες να ανακοινώσουν το πρόβλημα και όχι τη λύση (τον αριθμό της κάρτας) και οι υπόλοιπες ομάδες να καταλάβουν αν η λύση είναι ο δικός τους αριθμός, αφού κατόπιν ανακοινώσουν και το δικό τους πρόβλημα.

**2.2.1.στ Οι αριθμοί κρύβονται πίσω από σχήματα και οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τις ισότητες**

Προτείνονται δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές αναζητώντας την ισότητα σε ζυγαριές που ισορροπούν. Μπορούν να αξιοποιηθούν ζυγαριές που στη μια πλευρά έχουν σχήματα και στην άλλη αριθμοί και με νοερούς υπολογισμούς οι μαθητές βρίσκουν τις ισότητες,  (βλ. Παράρτημα εικόνα 3), ζυγαριές που έχουν μόνο σχήματα που αντιστοιχούν σε αριθμούς  (βλ. Παράρτημα εικόνα 4, 5).

**2.2.1.ζ Δραστηριότητα επέκτασης: Ακούω την ιστορία και εντοπίζω την ισότητα**

Ο εκπαιδευτικός αφηγείται μια ιστορία/ ένα βιβλίο με αφηγηματικό περιεχόμενο στην οποία προκύπτουν μαθηματικές σχέσεις ισότητας. Κατά τη διάρκεια της αφήγησης, ο εκπαιδευτικός σταματά την ανάγνωσή του και ζητά από τους μαθητές να ανακαλύψουν τις ισότητες που άκουσαν.  Οι μαθητές τις εντοπίζουν και τις καταγράφουν. Μετά την αφήγηση οι ομάδες παρουσιάζουν τις ισότητες με συμβολικό τρόπο.

Για τη δραστηριότητα αυτά προτείνονται τα εξής βιβλία:

* Αρτζανίδου, Ε. (2013). *Άγης ο Μαθημάγος.* Ψυχογιός
* Ηλιόπουλος, Β. (1997). *Ο Τριγωνοψαρούλης.* Εκδόσεις Πατάκη
* Μουντζούρη, Γ. (2018). *Αριθμοχώρα εναντίον Γραμματοχώρας.* Κέδρος
* Τριβιζάς, Ε. (2013). *Φουφήχτρα - Η μάγισσα με την ηλεκτρική σκούπα*. Μίνωας
* Daciute, E. (2019). *Οι ελέφαντες πηγαίνουν επίσκεψη.* Ηλίβατον

**2.2.2 Χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας που επιδιώκεται να αναδειχθούν κατά την ενασχόληση των μαθητών με καθένα από τα συγκεκριμένα έργα.**

Ακολουθώντας τη διδακτική προσέγγιση της διαφοροποιημένης διδασκαλίας οι μαθητές μπορούν να ομαδοποιηθούν με βάση τα ενδιαφέροντα, την ετοιμότητα, το μαθησιακό τους προφίλ  (Tomlinson, 2001b). Η ευέλικτη ομαδοποίηση μπορεί να διαμορφωθεί από τις ανάγκες και την ανταπόκριση των μαθητών.  Στην πρώτη φάση προτείνεται η ομαδοποίηση να γίνει με βάση την ετοιμότητά τους (χαμηλή, μεσαία, υψηλή). Όλες οι ομάδες έχουν χειραπτικό υλικό: η ομάδα Α (ομάδα χαμηλής ετοιμότητας) αλληλοσυνδεόμενους κύβους, η ομάδα Β (ομάδα μέσης ετοιμότητας) ντόμινο  και η ομάδα Γ (ομάδα υψηλής ετοιμότητας) νομίσματα ευρώ (το υλικό που προτείνεται είναι εκπαιδευτικό και αφορά μόνο σε κέρματα και χαρτονομίσματα του ευρώ και όχι σε λεπτά).  Οι μαθητές εργάζονται σε τετραμελείς ομάδες και καθένας έχει διακριτό ρόλο. Οι μαθητές μαθαίνουν με διαφορετικό τρόπο, σε διαφορετικά ποσοστά και ο εκπαιδευτικός διαφοροποιεί ρόλους και μεθόδους ώστε να εξασφαλίσει ότι όλοι οι μαθητές ωφελούνται (Heacox, 2002). Έτσι, προτείνεται να δοθούν στους μαθητές κάρτες όπου θα αναγράφεται ο ρόλος τους και θα έχουν μια χαρακτηριστική εικόνα. Οι κάρτες θα εναλλάσσονται μεταξύ των μελών της ομάδας μετά το πέρας κάθε παραδείγματος, ώστε όλοι να εμπλακούν στην ίδια δραστηριότητα περνώντας από κάθε ρόλο. Οι αρμοδιότητες των ρόλων αφορούν στη διαχείριση του χειραπτικού υλικού (τεχνουργήματος), στην καταγραφή των αριθμητικών παραστάσεων, στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων-συμπερασμάτων.

Οι δραστηριότητες μπορεί είτε να είναι κοινές και η διαχείριση του χειραπτικού υλικού να διαφοροποιεί τον βαθμό δυσκολίας, είτε να προτείνεται η χρήση μεγαλύτερων αριθμών. Δίνεται η επιλογή στον εκπαιδευτικό να προσαρμόσει τις δραστηριότητες στις διαφορετικές ανάγκες των μαθητών, όπως προτάσσει η μέθοδος της διαφοροποιημένης διδασκαλίας.

**2.3 Διδακτικές ενέργειες – διδακτικές πρακτικές**

Περιβάλλον: Συμμετοχικής/ συνεργατικής μάθησης

Η επιλογή του περιβάλλοντος συμμετοχικής / συνεργατικής μάθησης προκύπτει μέσα από την θεωρητική παραδοχή ότι η διαδικασία της μάθησης είναι μια συνεργατική διαδικασία, κατά την οποία το άτομο συμμετέχοντας σε μία κοινότητα, οικοδομεί τη γνώση μέσα από τη διαρκή αντιπαραβολή μεταξύ της δικής του αντίληψης των πραγμάτων και της αντίληψης που έχουν αναπτύξει τα υπόλοιπα μέλη της κοινότητας (Vrasidas & Veletsianos, 2010). Η παραπάνω αλληλεπίδραση, με την ταυτόχρονη διαμεσολάβηση των κατάλληλων εργαλείων που μπορεί να χρησιμοποιηθούν, οδηγούν τα μεμονωμένα άτομα που απαρτίζουν την κοινότητα, στο να  αποδίδουν νόημα στις εμπειρίες τους και να βελτιώνουν τις γνωστικές ιδιότητες τόσο των ίδιων (ατομικά) όσο και της κοινότητας (συλλογικά).

Διδακτικές πρακτικές: Αξιοποίηση της μαθηματικής συζήτησης - επικοινωνίας (των ερωτήσεων, του διαλόγου, της τεκμηρίωσης, της επεξήγησης)

Η επιλογή της συγκεκριμένης διδακτικής πρακτικής, βασίζεται σε ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν ότι είναι ωφέλιμη η εμπλοκή των μαθητών σε περιβάλλοντα μάθησης που εμπεριέχουν την πρακτική της μαθηματικής συζήτησης. Σύμφωνα με τους Dekker & Elshout-Mohr (1998), μέσα από τις συζητήσεις οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να παρουσιάσουν τη μαθηματική δραστηριότητα που ανέπτυξαν, και μέσα από αυτή τη διαλογική διαδικασία ασκούνται στο να προβαίνουν σε διαδικασίες όπως είναι η επεξήγηση (explanation), η αιτιολόγηση (justification) και σε κάποιες περιπτώσεις και η αναδόμηση (reconstruction) της δραστηριότητας. Η αξιοποίηση της εν λόγω διδακτικής πρακτικής επιπρόσθετα μπορεί εν δυνάμει να συμβάλει στην καλλιέργεια ορισμένων χρήσιμων ενεργειών όπως είναι η αξίωση προς το συνομιλητή να παρουσιάσει τη μαθηματική του δραστηριότητα δίνοντας επεξηγήσεις γύρω από αυτήν, καθώς και η άσκηση γόνιμης κριτικής μεταξύ των συνομιλητών σε σχέση πάντα με την υπό συζήτηση μαθηματική δραστηριότητα.

Διδακτική προσέγγιση: Διαφοροποιημένη διδασκαλία, Ενεργή μάθηση

Η έμφαση που δίνεται στο ζήτημα της διαφοροποίησης της διδασκαλίας έχει ως σημείο εκκίνησης την παραδοχή ότι η σχολική τάξη συνιστά ένα ετερογενές σύνολο ατόμων που παρουσιάζουν μεταξύ τους μεγάλο βαθμό ανομοιογένειας σε σχέση με τις εμπειρίες και τα βιώματα που φέρουν, και τις μαθησιακές τροχιές που έχουν ακολουθήσει. Από το στοιχείο αυτό προκύπτει ότι το εύρος των μαθησιακών αναγκών που η διδασκαλία καλείται να ικανοποιήσει είναι ιδιαίτερα ευρύ, κάτι που είναι πιθανόν να συμβεί μέσα από την αξιοποίηση πλήθους διαφορετικών στρατηγικών όπως προτείνει η προσέγγιση της διαφοροποιημένης διδασκαλίας (Russo, Sullivan & Bobis, 2021).

**2.3.1 Ρόλος ή ρόλοι του/της εκπαιδευτικού [επεξήγηση του τρόπου δράσης του στην τάξη ως πομπού, διευκολυντή, προγυμναστή, πλοηγού, διαμεσολαβητή, ενορχηστρωτή, φορέα ....],**

Ο εκπαιδευτικός της τάξης δρα ως διαμεσολαβητής και καθοδηγητής στο πλαίσιο του μαθήματος και παρεμβαίνει όπου και όταν χρειάζεται. Οργανώνει το μαθησιακό περιβάλλον και τις ομάδες των μαθητών σύμφωνα με τη διαφοροποιημένη και συνεργατική μάθηση, παρακολουθεί το έργο τους και συμβουλεύει τους μαθητές να σκεφτούν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης. Είναι σημαντικό να αξιοποιήσει για τις δραστηριότητες τις πρότερες γνώσεις των μαθητών και να τους ενθαρρύνει να συζητήσουν στις ομάδες για τρόπους διαχείρισης του υλικού και απαντήσεις/ λύσεις στα ερωτήματα που τους έχει θέσει. Επίσης, είναι πολύ σημαντική η ενίσχυση και η εμψύχωση που προσφέρει στους μαθητές κατά τη διάρκεια του έργου, δημιουργώντας έτσι ένα θετικό κλίμα συνεργασίας και αλληλοϋποστήριξης (Ματσαγγούρας, 1987). Ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τη συχνότητα των παραδειγμάτων σε σχέση με τη δραστηριότητα και σε σχέση με την κάθε ομάδα. Ολοκληρώνοντας τις δραστηριότητες του έργου, ο εκπαιδευτικός στην 1η φάση μπορεί να επιλέξει τις δραστηριότητες-άγκυρα ή τη χρήση ψηφιακών εργαλείων για την ανατροφοδότηση και την αξιολόγηση της ενώ στη 2η φάση η επιλογή αυτή δίνεται μέσα από τις δραστηριότητες επέκτασης.

**2.3.2 Ρόλος ή ρόλοι του/της μαθητή/τριας [επεξήγηση του τρόπου ενεργοποίησής του στην τάξη ως δέκτη, κατασκευαστή, εξερευνητή/δομιστή, συμμετέχοντος, μαθητευόμενου ...]**

Το έργο και οι δραστηριότητες που προτείνονται δίνουν στους μαθητές την ευκαιρία να εξερευνήσουν και να ανακαλύψουν τη δική τους πορεία προς τη λύση.  Ο διαχωρισμός των ομάδων βάσει της διαφοροποιημένης διδασκαλίας βοηθά τους μαθητές κάθε ετοιμότητας να συμμετέχει ενεργά στην ομάδα και να συνεργαστεί με τα υπόλοιπα μέλη αξιοποιώντας πρότερες γνώσεις. Οι μαθητές εστιάζουν στη συνεργασία κατά την διαδικασία κατασκευής του μαθηματικού νοήματος και καλούνται να βρουν τις κατάλληλες μεθόδους και εργαλεία για επίλυση των προβλημάτων.  Σε κάθε δραστηριότητα οι μαθητές αναλαμβάνουν ρόλους και συμμετέχουν στο έργο άλλοτε ως εξερευνητές και άλλοτε ως συμμετέχοντες. Κάθε ρόλος είναι ιδιαίτερα βοηθητικός και ενισχύει τη συνεργατική μάθηση. Καθ’ όλη τη διάρκεια της διαδικασίας ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί με ερωτήσεις και διευκολύνει το έργο των παιδιών. Τους ενθαρρύνει να συσχετίσουν τις ιδέες τους και να τις συνδέσουν με μαθηματικές έννοιες και μεθόδους ώστε να καταλήξουν σε γενικεύσεις σχετικά με την έννοια της ισότητας. Με την ολοκλήρωση του έργου, αξιολογούν τη διαδικασία και συζητούν για τις δεξιότητες που αναπτύχθηκαν μέσω αυτής.

**2.3.3 Διαχείριση του δυναμικού της τάξης**

Ο εκπαιδευτικός της τάξης μπορεί να αξιοποιήσει στρατηγικές και χαρακτηριστικά της διαφοροποιημένης διδασκαλίας προκειμένου να οργανώσει και να διαχειριστεί το δυναμικό της τάξης του.

Στην 1η φάση, ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί τα τρία στάδια διαχείρισής του έργου. Αρχικά,  οργανώνει τους μαθητές, δημιουργεί τετραμελείς ομάδες με κριτήρια όπως το μαθησιακό επίπεδο, οι ανάγκες, τα ενδιαφέροντά τους με στόχο τα κοινά ΠΜΑ παρά τις διαφοροποιημένες διαδρομές και τη συμπερίληψη όλων των μαθητών κι όχι τον διαχωρισμό τους. Στη συνέχεια εισάγει τους μαθητές και τους προετοιμάζει για τη νέα γνώση. Με την πρώτη δραστηριότητα, οι μαθητές ανταλλάσσουν ιδέες, καταγράφουν τις σκέψεις τους και καταλήγουν στην γενίκευση της έννοιας της ισότητας. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη συζήτηση και εξηγεί τη σημασία της ισότητας και τον τρόπο που τη συμβολίζουμε. Με την επόμενη δραστηριότητα, οι μαθητές πειραματίζονται και διερευνούν την ισότητα μέσα από μια σειρά πράξεων. Ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά μαζί τους και τους καθοδηγεί να εντοπίσουν ομοιότητες ή διαφορές μεταξύ των δύο μερών των πράξεων. Η δραστηριότητα αυτή τους οδηγεί στην επόμενη μέσω της οποίας ο εκπαιδευτικός θα διαπιστώσει τον βαθμό κατανόησης και σαφήνειας της νέας γνώσης από τους μαθητές καθώς καλούνται να δημιουργήσουν ισότητες μεταξύ διαφορετικών ή ίδιων πράξεων. Ολοκληρώνοντας την 1η φάση, προτείνεται μια δραστηριότητα - άγκυρα και μπορεί να αξιοποιηθεί για τους μαθητές οι οποίοι ολοκλήρωσαν όλες τις δραστηριότητες σε σύντομο χρονικό διάστημα. Στο τρίτο και τελευταίο στάδιο, είναι στην ευχέρεια του εκπαιδευτικού να προχωρήσει σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών, να συζητήσει στην ολομέλεια για τους τρόπους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν οι ομάδες καθώς και να χρησιμοποιήσει ψηφιακά εργαλεία για να διερευνήσει αν οι μαθητές έφτασαν στα ΠΜΑ.

Στη 2η φάση, οι μαθητές έχουν ήδη οδηγηθεί σε γενικεύσεις και συμπεράσματα. Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί εποικοδομητικά τις προηγούμενες γνώσεις και με τεχνικές όπως οι προτροπές ενεργοποίησης, ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν σε διάλογο με ερωτήσεις. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια χειραπτικού υλικού και των μαθηματικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές διατυπώνουν με διαφορετικό τρόπο τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες απευθύνονται σε όλους τους μαθητές, είναι κλιμακούμενης δυσκολίας και η κάθε ομάδα τις διαχειρίζεται βάσει των δυνατοτήτων τους.

**2.3.4 Διαχείριση 'πρακτικών’ παραμέτρων, όπως ο χρόνος και οι υλικοτεχνικές υποδομές**

Για την περαίωση των στόχων του διδακτικού σεναρίου προτείνονται τουλάχιστον 2 διδακτικές ώρες που αντιστοιχούν σε κάθε φάση. Είναι ευνόητο πως τίθεται στην ευχέρεια του εκπαιδευτικού να αποφασίσει κρίνοντας από την ενεργητική συμμετοχή και την ανταπόκριση των ομάδων η διαχείριση του χρόνου σε κάθε δραστηριότητα, μέσα από την αξιοποίηση πλήθους παραδειγμάτων. Τα τεχνουργήματα που προτείνονται μπορούν να αντικατασταθούν από παρόμοια, σε ενδεχόμενη έλλειψη υλικοτεχνικών πόρων. Για παράδειγμα αντί του εκπαιδευτικού υλικού της τράπεζας, οι μαθητές μπορούν να πάρουν τα νομίσματα που διατίθενται στη σελίδα από χαρτόνι του σχολικού εγχειριδίου (σελ. 81,83 Βιβλίο Μαθητή Β τεύχος). Αντί για αλληλοσυνδεόμενους κύβους (που ευνοούν την οπτικοποίηση της ισότητας δύο ομάδων όταν είναι συνδεδεμένοι) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ξυλάκια. Αντί των ντόμινο οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν σε χαρτόνι τα δικά τους.

Για τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων δεν είναι απαραίτητη η χρήση υπολογιστή σε κάθε ομάδα, επαρκεί η αξιοποίηση του διαδραστικού πίνακα, όπου εκεί οι ομάδες θα παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους ενώπιον της ολομέλειας, ως πρακτική αξιολόγησης και αυτοαξιολόγησης των ομάδων.

3. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Αξιολόγηση για μάθηση και ανατροφοδότηση του διδακτικού έργου *(π.χ. τρόποι άτυπης και τυπικής αξιολόγησης για μάθηση στη διάρκεια και ενδεχομένως στο τέλος του μαθήματος)*

**3.1. Αξιολόγηση μάθησης/ μαθητή** (πώς θα ελεγχθεί / διαπιστωθεί τι κατάφερε κάθε μαθητής αλλά και η τάξη συλλογικά)

Η αξιολόγηση γίνεται κατά τη διάρκεια του έργου με ερωτήσεις προς τους μαθητές και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κάθε ομάδας στο τέλος της διδακτικής ώρας. Πραγματοποιείται συζήτηση μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών και ακολουθεί η συμπλήρωση ατομικού φύλλου εργασίας (κάρτα εξόδου) με ασκήσεις εμπέδωσης κλειστού τύπου. Καθ’ όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός δρα ως παρατηρητής και καταγράφει ποιοτικά χαρακτηριστικά που αφορούν στην επίτευξη των στόχων του γνωστικού μέρους καθώς επίσης και στον τρόπο της συνεργασίας. Σε αυτή την προσπάθεια μπορούν να αξιοποιηθούν οι σχετικές ρούμπρικες που προτείνονται από τα Π.Σ, 2021 στο παρεχόμενο επιμορφωτικό υλικό. Μέσω αυτής της διαδικασίας ο εκπαιδευτικός αξιολογεί το έργο των ομάδων, τα εργαλεία και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν.  Στο τέλος, οι μαθητές οδηγούνται σε γενικεύσεις σχετικά με τη γνώση (δημιουργία ορισμών) και συζητούν με τον εκπαιδευτικό προτάσεις για βελτίωση της συνεργασίας.

**3.2. Για το διδακτικό έργο** (πώς θα ελεγχθεί / διαπιστωθεί αν οι διδακτικές επιλογές ήταν επιτυχείς ή αναποτελεσματικές;)

Για την αξιολόγηση του διδακτικού έργου μπορούν να τεθούν ποσοτικά και ποιοτικά κριτήρια. Βασικό μέλημα είναι κατά πόσο οι μαθητές κατανόησαν την έννοια της ισότητας και τη χρήση του συμβόλου και μπόρεσαν να εφαρμόσουν τη νέα γνώση στις προτεινόμενες δραστηριότητες, κάτι που μπορεί να εκτιμηθεί λαμβάνοντας υπόψη στοιχεία όπως τα παρακάτω.

* Αν ο χρόνος περάτωσης κάθε δραστηριότητας ήταν ισότιμος για κάθε ομάδα ετοιμότητας.
* Αν οι δραστηριότητες φάνηκαν να ευνοούν τη συνεργασία και τη διαφοροποίηση.
* Κατά πόσο όλοι οι μαθητές κατέκτησαν τους γνωστικούς στόχους, όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα της κάρτας εξόδου.
* Αν οι μαθητές υψηλής ετοιμότητας ανταποκρίθηκαν σε δραστηριότητες επέκτασης κατακτώντας στόχους εφαρμογής και δεξιοτήτων

Η αξιολόγηση του διδακτικού έργου μπορεί να ολοκληρωθεί με συζήτηση στην ολομέλεια όπου οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να προβούν σε αξιολόγηση του έργου των ομάδων και να προτείνουν τρόπους περαιτέρω βελτίωσης της συνεργασίας και του έργου.

 5 ΠΗΓΕΣ/ΠΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

* Ψηφιακή εφαρμογή <https://www.didax.com/apps/math-balance/>
* Ψηφιακή εφαρμογή <https://toytheater.com/scale/>
* Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό 2021, Αθήνα:  ΙΕΠ,
* Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (2021). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό, Αθήνα: ΙΕΠ.

 6 . ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΔΙΚΤΥΟΓΡΑΦΙΑ

Ιγγλέζου, Α. & Μπρόκου, Μ. (2012). Η έννοια της ισότητας : δυσκολίες και η αντιμετώπισή τους στη σχολική τάξη. Στο Κ. Μαλαφάντης & Θ. Μπάκας (επιμ.). *8ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Παιδαγωγικής Εταιρείας Ελλάδος. Ελληνική Παιδαγωγική & Εκπαιδευτική Έρευνα*. Ιωάννινα: εκδόσεις διάδραση.

Ματσαγγούρας, Η.Γ. (1987), «Το ψυχολογικό κλίµα της τάξης: µια έρευνα για το δηµοτικό σχολείο», Νέα Παιδεία, 44, 106-118.

Χαραλάμπους, Ν. (2000). *Συνεργατική µάθηση: από τη θεωρία στην πράξη*. Retrieved July 1, 2022, from <http://users.sch.gr/kliapis/NeofytF.pdf> Kieran, C.  (1981). Concepts associated with the equality symbol*. Educational Studies in Mathematics.* Retrieved July 2, from <https://oak.ucc.nau.edu/smg224/401pdfs/algebrareadings/kieran1.pdf>

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 303-314

Heacox, D. (2002). *Differentiating instruction in the regular classroom: How to reach and teach all learners, grades 3-12*. Minneapolis, MN: Free Spirit Publishing Inc.

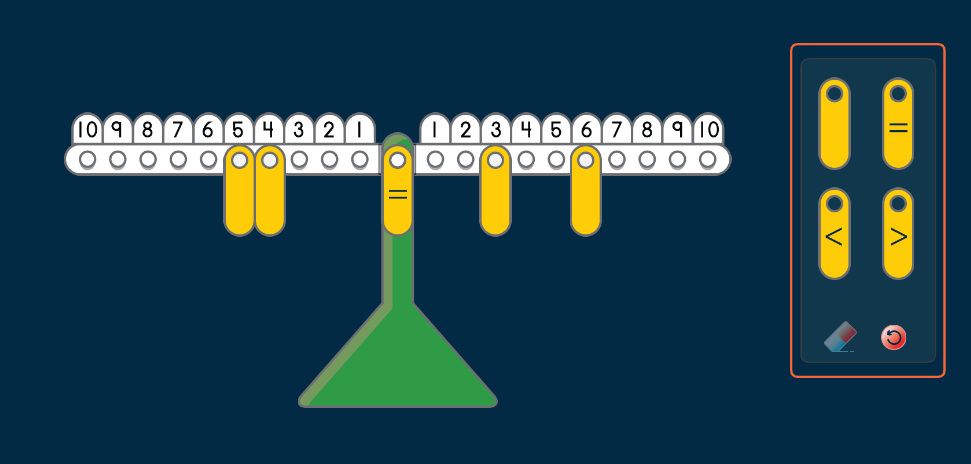
Madej, L. (2022). Primary School Students’ Knowledge of the Equal Sign—the Swedish Case, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 321-343. doi: 10.1007/s10763-020-10144-z

Russo, J., Sullivan, P. & Bobis, J. (2021). Differentiating Instruction in Mathematics, Mathematics Teacher Education and Development, 23 (3), 1-5

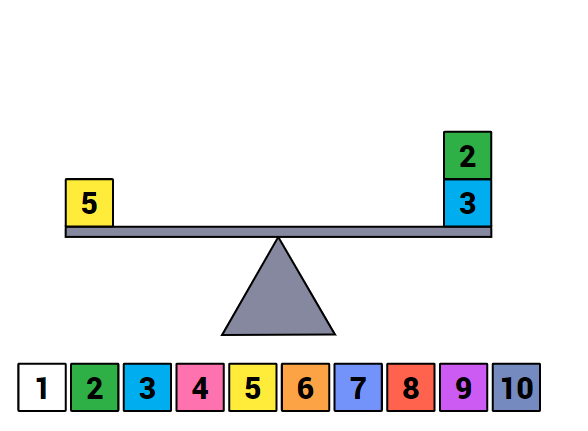
Tomlinson, C. A. (2001b). How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Vrasidas, C. & Veletsianos, G. (2010). Theoretical Foundations of Social Computing and Virtual Communities. In P. Zaphiris & C. S. Ang (Eds.), *Social Computing and Virtual Communities* (pp.1-20). New York: CRC Press.

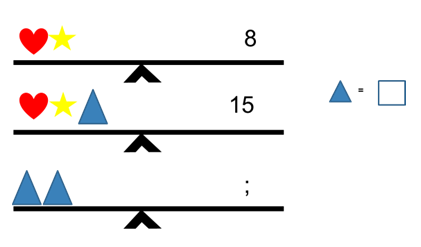
 7 . ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Παράθεση των έργων και άλλων υλικών που αξιοποιούνται στην τάξη)



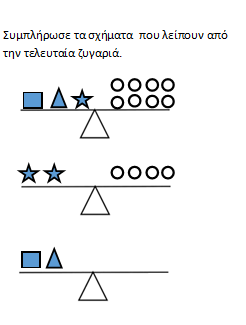
**Εικόνα 1**



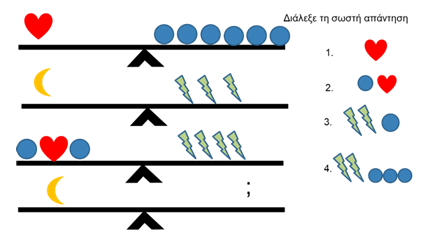
**Εικόνα 2**

****

**Εικόνα 3**

****

**Εικόνα 4**

****

**Εικόνα 5**